Nietrost Bernhard bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Abstrahlung der Erde bei Nacht

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Integral- und Differentialrechnung (uneigentliches Integral), Kurvendiskussion, Differentialgleichung 1.Ordnung, Trennen der Variablen, Kurvenschar, graphische Darstellung von Funktionen auch als Kurvenschar.

- Kurzzusammenfassung

  Strahlungsgesetz (Planck, Wien, Stefan Boltzmann) und dessen Auswirkungen auf den Energiehaushalt der Erde bei Nacht.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand:

  Naturwissenschaftliche Formulierung und Lösung eines vor allem in klaren Winternächten beobachtbaren Phänomens, Querverknüpfung zu Physik, [zwei bis drei Doppelstunden für das gesamte Paket, Teile auch kürzer, kann auch auf 3. und 4 Jahrgang aufgeteilt werden, Länge je nach Intensität variabel]

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 3/4 Jahrgang, alle Abteilungen

- Mathcad-Version:

  Mathcad 2001 (da MCD 14 beim Integrieren tw. sonderbare Lösungen liefert)

- Literaturangaben: [***optional; sehr erwünscht***]

  Taschenbuch der Physik (Kuchling), Internet

- Anmerkungen bzw. Sonstiges: [***optional***]

  Mathematische teilweise komplizierte Sachverhalte beim Planck'schen und Wien'schen Gesetz, der zweite Teil ist im Vergleich dazu eher einfach.

Abstrahlung der Erdoberfläche in der Nacht

1. Physikalische Grundlagen

1.1 Planck'sches Strahlungsgesetz

Max Planck fand den theoretischen Zusammenhang zwischen der Abstrahlung eines schwarzen Körpers und der Wellenlänge unter Annahme der Qantenhypothese 1901. (Geburtsstunde der Quantenpyhsik)

$$I_P = \frac{8\cdot\pi\cdot h\cdot c}{\lambda^5\cdot\left(e^{\frac{h\cdot c}{k\cdot T\cdot\lambda}} - 1\right)}$$

Planck beschreibt die Abstrahlung eines schwarzen Körpers der Fläche 1m² im Bereich Wellenlängenbereich $\lambda \,..\, \lambda + d\lambda$ in den Hohlraum.

h, c, k sind physikalische Konstanten (Werte siehe weiter unten),
T ist die Temperatur in K
λ die Wellenlänge in m.

1.2 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Die Maxima der Abstrahlung können mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz berechnet werden.
Dazu muss die erste Ableitung Null gesetzt werden. Die entstehende Gleichung ist transzendent.

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{8\cdot\pi\cdot h\cdot c}{\lambda^5\cdot\left(e^{\frac{h\cdot c}{k\cdot T\cdot\lambda}} - 1\right)} \text{ vereinfachen } \rightarrow -8\cdot\pi\cdot h\cdot c\cdot\frac{\left(5\cdot k\cdot T\cdot\lambda\cdot\exp\left(h\cdot\frac{c}{k\cdot T\cdot\lambda}\right) - 5\cdot k\cdot T\cdot\lambda - h\cdot c\cdot\exp\left(\right.\right.}{\lambda^7\cdot\left(\exp\left(h\cdot\frac{c}{k\cdot T\cdot\lambda}\right) - 1\right)^2\cdot k\cdot T}$$

$$0 = -8\cdot\pi\cdot h\cdot c\cdot\frac{\left(5\cdot k\cdot T\cdot\lambda\cdot\exp\left(h\cdot\frac{c}{k\cdot T\cdot\lambda}\right) - 5\cdot k\cdot T\cdot\lambda - h\cdot c\cdot\exp\left(h\cdot\frac{c}{k\cdot T\cdot\lambda}\right)\right)}{x^7\cdot\left(\exp\left(h\cdot\frac{c}{k\cdot T\cdot\lambda}\right) - 1\right)^2\cdot k\cdot T}$$

Multiplikation mit dem Nenner liefert die etwas einfachere Gleichung.

$$0 = -8\cdot\pi\cdot h\cdot c\cdot\left(5\cdot k\cdot T\cdot\lambda\cdot\exp\left(h\cdot\frac{c}{k\cdot T\cdot\lambda}\right) - 5\cdot k\cdot T\cdot\lambda - h\cdot c\cdot\exp\left(h\cdot\frac{c}{k\cdot T\cdot\lambda}\right)\right)$$

Division durch den Vorfaktor und anschließend durch $k\cdot T\cdot\lambda$ liefert:

$$0 = \left(\exp\left(h \cdot \frac{c}{k \cdot T \cdot \lambda}\right) - 1 - \frac{h \cdot c}{5 \cdot k \cdot T \cdot \lambda} \cdot \exp\left(h \cdot \frac{c}{k \cdot T \cdot \lambda}\right)\right)$$

Substitution von $X = \frac{h \cdot c}{k \cdot T \cdot \lambda}$ erzeugt die zu lösende transzendente Gleichung.

$$0 = \exp(X) - 1 - \frac{X}{5} \cdot \exp(X) \text{ auflösen}, X \rightarrow \begin{pmatrix} W(-5 \cdot \exp(-5)) + 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung benötigt man entweder die LambertW Funktion oder ein ein Näherungsverfahren mit Startwert zum Lösen von Gleichungen wie Wurzel in MCD:

$$Y(X) := \exp(X) - 1 - \frac{X}{5} \cdot \exp(X) \qquad X := 5 \qquad X := \mathrm{wurzel}(Y(X), X) \qquad X = 4.965$$

Rücksubstitution und Umformen liefert das Wien'sche Verschiebungsgesetz:

$$X = \frac{h \cdot c}{k \cdot T \cdot \lambda} \qquad T \cdot \lambda = \frac{h \cdot c}{k \cdot X} = \text{constant}$$

Mit den Konstanten:

- Planckkonstante: $h := 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$
- Boltzmannkonstante: $k := 1.38065 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
- Lichtgeschwindigkeit: $c := 2.9979 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$

ergibt sich die Konstante des Wien'schen Verschiebungesetzes ist: $\frac{h \cdot c}{k \cdot X} = 2.898 \times 10^{-3}\, m\, K$

Somit erhält man die Maxima des Planck'schen Strahlungsgesetzes in Abhängigkeit von der Temperatur T in Kelvin mit : $\lambda_{wien}(T) := \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \cdot m \cdot K}{T}$

1.3 Graphische Darstellung des Planck'schen Strahlungsgesetzes und Wien'sches Verschiebungsgesetzes

Das Planck'sche Strahlungsgesetz wird so definiert, dass eine Kurvenschar gezeichnet werden kann.

Planck: $$I_P(\lambda, T) := \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{h \cdot c}{k \cdot T \cdot \lambda}} - 1\right)}$$

Zum Zeichnen sind Vorgaben bezüglich des Darstellungsbereichs sinnvoll. Ist das Maximum bekannt, bekommt man eine Abschätzung der Größenordnung.

Das Maximum kann mit Hilfe der Differentialrechnung oder mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz bestimmt werden. Zum Vergleich werden beide Varianten gerechnet.

$$I_{P1}(\lambda, T) := \frac{d}{d\lambda} I_P(\lambda, T)$$

erste Ableitung des Strahlungsgesetzes

$$\lambda_M := 10 \cdot 10^{-6} \cdot m$$

Startwert für Nullstelle der ersten Ableitung

$$\lambda_{max}(T) := \mathrm{wurzel}\left(I_{P1}\left(\lambda_M, T\right), \lambda_M\right)$$

Funktionsdefinition für wiederholtes Durchführen.

$$T_Z := \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 275 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix} K$$

Verschiedene Temperaturwerte zur Bestimmung der Maxima.

$$\lambda_{WIEN} := \overrightarrow{\lambda_{wien}\left(T_Z\right)}$$

$$\lambda_{MAX} := \overrightarrow{\lambda_{max}\left(T_Z\right)}$$

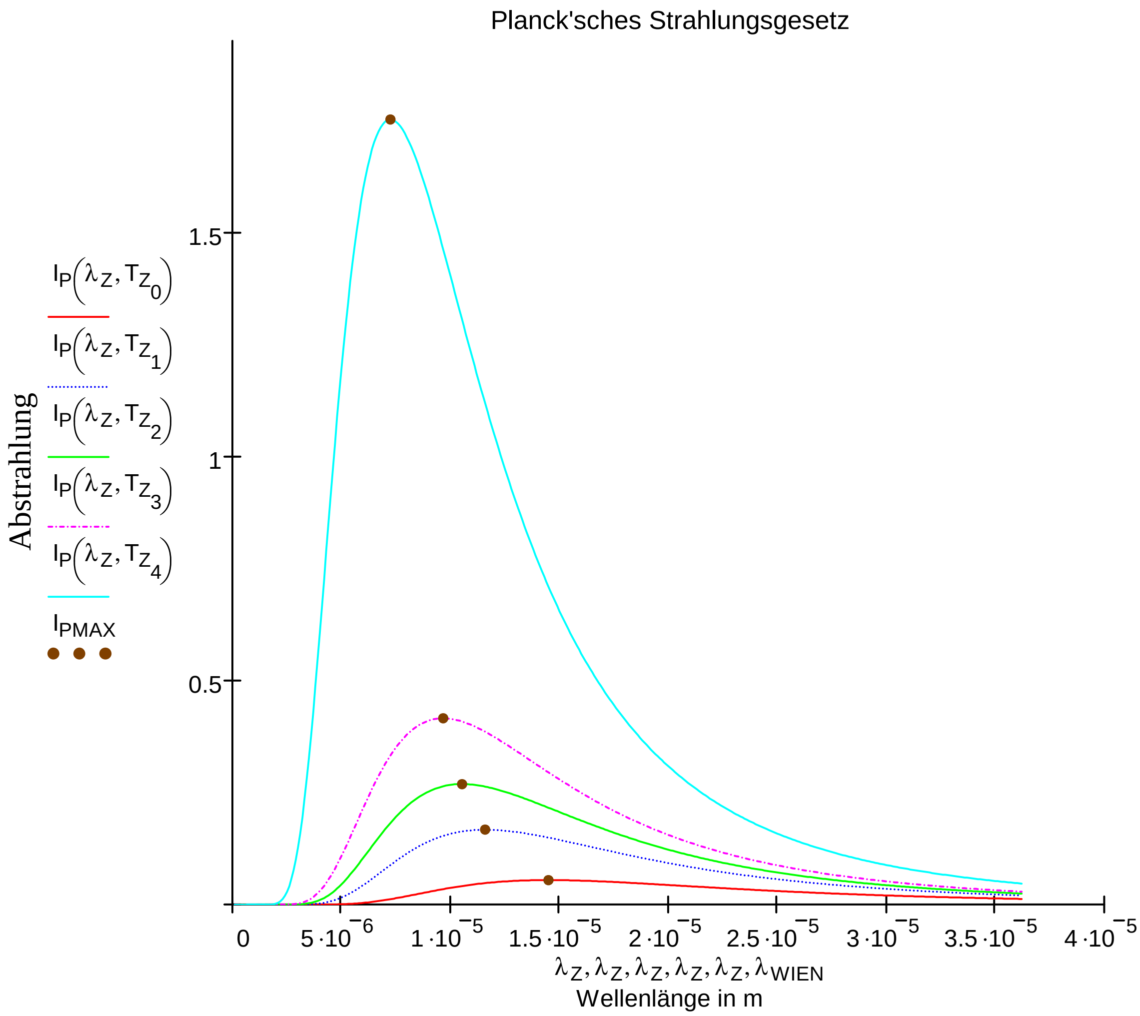
$$I_{PMAX} := \overrightarrow{I_P\left(\lambda_{wien}\left(T_Z\right), T_Z\right)}$$

Definition der Maxima bei verschiedenen Temperaturen als Vektor und darunter die Ausgabe der Ergebnisse. Zum Vergleich sind die Resultate mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz und über die numerische Lösung der ersten Ableitung angegeben. Es ergeben sich beim letzten Wert starke Abweichungen vom richtigen Ergebnis, da der Startwert zu weit von der Nullstelle entfernt ist.

$$\lambda_{WIEN} = \begin{pmatrix} 1.449 \times 10^{-5} \\ 1.159 \times 10^{-5} \\ 1.054 \times 10^{-5} \\ 9.66 \times 10^{-6} \\ 7.245 \times 10^{-6} \end{pmatrix} m \qquad \lambda_{MAX} = \begin{pmatrix} 1.449 \times 10^{-5} \\ 1.001 \times 10^{-5} \\ 1.054 \times 10^{-5} \\ 9.659 \times 10^{-6} \\ -9.686 \times 10^{-4} \end{pmatrix} m \qquad I_{PMAX} = \begin{pmatrix} 0.055 \\ 0.168 \\ 0.27 \\ 0.417 \\ 1.758 \end{pmatrix} \frac{kg}{m^2 s^2}$$

Der Darstellungsbereich der Wellenlänge und der Leistung kann nun definiert werden:

- Wellenlänge: $\lambda_Z := 0 \cdot m, 10^{-7} \cdot m \,..\, 2.5 \cdot \max\left(\lambda_{WIEN}\right)$
- Leistung von 0 bis $MAX := \max\left(I_{PMAX}\right) \cdot 1.1$



- Die Maxima des Planck'schen Strahlungsgesetzes liegen auf einer Hyperbel wie ein Einsetzen des Wien'schen Verschiebungsgesetzes für die Temperatur T in das Planck'sche Strahlungsgesetz zeigt:

$$\frac{8\cdot\pi\cdot h\cdot c}{\lambda^5\cdot\left(e^{\frac{h\cdot c}{k\cdot T\cdot\lambda}}-1\right)} \;\left|\; \begin{array}{l}\text{ersetzen}, T = \dfrac{2.898\cdot10^{-3}\cdot m\cdot K}{\lambda} \\ \text{gleit}, 3\end{array}\right. \rightarrow 3.52\cdot10^{-26}\cdot J\cdot\frac{m}{\lambda^{5.}}$$

Der entstehende Ausdruck ist proportional $\frac{1}{\lambda^5}$ (also einer Hyperbel).

- Die Fläche unter der Kurve entspricht der gesamten abgestrahlten Leistung. Deutlich zu erkennen ist die Zunahme der Fläche mit steigender Temperatur.
- Das zum Flächenberechnen notwendige uneigentliche Integral kann von MCD 2001 aber nicht von MCD 14 gelöst werden (hier aus Gründen der Einfachheit ohne Einheiten und Konstanten).

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^5\cdot\left(e^{\frac{1}{200\cdot x}}-1\right)}\,dx \rightarrow \frac{320000000}{3}\cdot\pi^4 \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^5\cdot\left(e^{\frac{1}{400\cdot x}}-1\right)}\,dx \rightarrow \frac{5120000000}{3}\cdot\pi^4$$

Ein Verdoppeln der Temperatur führt zu einer Zunahme der Fläche um den Faktor 16.
Dies weist auf einen Zusammenhang zwischen Temperatur und Strahlungsleistung (= Fläche) entsprechend einer Potenzfunktion 4. Grades hin, wie im weiter untenstehenden Stefan Boltzmann Gesetz beschrieben.
Auf die detaillierte Herleitung des Stefan Boltzmann Gesetzes wird hier verzichtet.

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^5 \cdot \left(e^{\frac{1}{400 \cdot x}} - 1\right)}\,dx}{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^5 \cdot \left(e^{\frac{1}{200 \cdot x}} - 1\right)}\,dx} \rightarrow 16$$

Redefinition von c

$c := c$

1.4 Stefan-Boltzmann Gesetz

Die Erde kann Wärmeenergie nur über Strahlung abgeben oder aufnehmen, da dies die einzige Möglichkeit für Energietransport im Vakuum darstellt. Vor allem in klaren Winternächten ist die Wärmeabgabe der Erde durch Abstrahlung sehr deutlich festzustellen.
Die physikalische Beschreibung dieses Wärmetransports erfolgt durch das Stefan-Boltzmann Gesetz: Jeder Köper, dessen Temperatur von 0 K verschieden ist, emmittiert sogenannte Wärmestrahlung.

$$P_S = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$

Gleichzeitig absorbiert der Körper aber auch die aus der Umgebung mit Temperatur T_0 kommende Strahlung. Unter der Vorraussetzungen gleicher Fläche und gleicher Emissionsgrad verändert sich die Formel geringfügig:

$$P_S = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot \left(T^4 - T_0^4\right)$$

ε........Emissionsgrad (maximal 1)

σ ...... Stefan Boltzmann Konstante der Strahlung $\quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$

T .... Temperatur der Erdoberfläche in [K]

T_0 ..... Temperatur des Nachthimmels (ungefähr 0 K bei klarer Nacht, deutlich größer bei Bewölkung)

1.5 Wärmeenergie

- Die in einem Körper der Masse m gespeicherte Wäremeenergie ist $Q = m \cdot c \cdot T$
- Eine Änderung der Wärmeenergie bedeutet auch eine Änderung der Temperatur $\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T$

2. Aufstellen der Differentialgleichung

Grundidee zur Aufstellung der Differentialgleichung:

- Die in der obersten Schicht der Erde gespeicherte Wärmeenergie Q wird entsprechend dem Stefan-Boltzmann Gesetz abgestrahlt wobei das negative Vorzeichen die Abnahme beschreibt: $P = -\left[\varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot \left(T^4 - T_0{}^4\right)\right]$
- Die pro Zeit abgestrahlte Energie entspricht der Leistung und kann in differentieller Form eingesetzt werden: $P = \frac{dQ}{dt} = -\left[\varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot \left(T^4 - T_0{}^4\right)\right]$
- Die in der obersten Schicht gespeicherte Wärme Q hängt von Masse, Wärmekapazität und der Temperaturdifferenz ab. In differentieller Form kann dies durch $dQ = m \cdot c \cdot dT$ ausgedrückt werden. Einsetzen liefert die zu lösende Differentialgleichung $\frac{m \cdot c \cdot dT}{dt} = -\left[\varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot \left(T^4 - T_0{}^4\right)\right]$

$$\frac{m \cdot c \cdot dT}{dt} = -\left[\varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot \left(T^4 - T_0{}^4\right)\right]$$

Differentialgleichung für Abstrahlung.

$$T(0) = T_E$$

Anfangsbedingung für Anfangstemperatur der Erdoberfläche zur Zeit 0.

3. Lösung der Differentialgleichung

$$-\int \frac{1}{T^4 - T_0{}^4}\, dT = \int \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c}\, dt$$

Separation der Variablen

3.1 Analytische Lösung für klare Nächte

In klaren Nächten erfolgt die Abstrahlung gegen das Weltall und eine Temperatur von ca. 0K. Somit vereinfacht sich die Differentialgleichung:

$$-\int \frac{1}{T^4}\, dT = \int \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c}\, dt$$

Separation der Variablen

$$-\int \frac{1}{T^4}\, dT \rightarrow \frac{1}{3 \cdot T^3}$$

Integration der beiden Seiten

$$\int \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c}\, dt \rightarrow \varepsilon \cdot \sigma \cdot \frac{A}{m \cdot c} \cdot t$$

Anmerkung: MCD 2001 schreibt im Ergebnis x statt ε

$$\frac{1}{3 \cdot T^3} = \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c} \cdot t + C$$

allgemeine explizite Lösung

$$T = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c} \cdot t + C}}$$

allgemeine implizite Lösung

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt die Konstante C:

$$T = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c} \cdot t + C}} \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, T = T_E \\ \text{auflösen}, C \\ \text{ersetzen}, t = 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{T_E^{\;3}}$$

$$C = \frac{1}{T_E^{\;3}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c} \cdot t + \frac{1}{T_E^{\;3}}}}$$

spezielle explizite Lösung

3.2 Analytische Lösung für bewölkte Nächte

Bei bedecktem Himmel erfolgt die Abstrahlung gegen die Wolken mit Temperatur T_0.

$$\int \frac{1}{T^4 - T_0^{\;4}}\, dT = -\int \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c}\, dt$$

Separation der Variablen

$$-\int \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c}\, dt \rightarrow -\varepsilon \cdot \sigma \cdot \frac{A}{m \cdot c} \cdot t$$

Integration der beiden Seiten
(wieder x statt ε)

$$\int \frac{1}{T^4 - T_0^4}\, dT \rightarrow \frac{1}{4 \cdot T_0^3} \cdot \ln(-T_0 + T) - \frac{1}{4 \cdot T_0^3} \cdot \ln(T_0 + T) - \frac{1}{2 \cdot T_0^3} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

Anmerkung: MCD 2001 liefert ein mit Partialbruchzerlegung nachvollziehbares Ergebnis, MCD 14 hingegen bietet ein eher verwirrendes Ergebnis, bei dem scheinbar eine Klammer fehlt !!!

$$\frac{1}{4 \cdot T_0^3} \cdot \ln(-T_0 + T) - \frac{1}{4 \cdot T_0^3} \cdot \ln(T_0 + T) - \frac{1}{2 \cdot T_0^3} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{T}{T_0}\right) = -\frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c} \cdot t + C$$

allgemeine explizite Lösung
Ein Umformen auf T nicht hier nicht mehr möglich.

$$\frac{1}{4 \cdot T_0^3} \cdot \ln(-T_0 + T) - \frac{1}{4 \cdot T_0^3} \cdot \ln(T_0 + T) - \frac{1}{2 \cdot T_0^3} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{T}{T_0}\right) = -\frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{m \cdot c} \cdot t + C \;\left|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen}, T = T_E \\ \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{auflösen}, C \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{4} \cdot -$$

$$C = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\ln(-T_0 + T_E) - \ln(T_0 + T_E) - 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{T_E}{T_0}\right)\right)}{T_0^3}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert die Konstante C

Definition der Lösung als Funktion der Temperatur.

$$t(T) = \frac{c \cdot m}{-k} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot T_0^3} \cdot \ln(-T_0 + T) - \frac{1}{4 \cdot T_0^3} \cdot \ln(T_0 + T) - \frac{1}{2 \cdot T_0^3} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{T}{T_0}\right) - C(T_0)\right)$$

4. Graphische Darstellung der Lösungen

4.1 Definition der Konstanten

Die Strahlungskonstante beträgt $\sigma := 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$, der Emissionsgrad etwa $\varepsilon := 0.7$ und als Fläche wird einfacherweise $A := 1 \cdot m^2$ angenommen. Nur die oberste Schicht der Erde (Annahme $d := 0.1 \cdot m$ dick mit einer Dichte von $\rho := 2000 \cdot \frac{kg}{m^3}$) verliert durch die Abstrahlung Wärmeenergie.

Diese Masse der obersten Schicht berechnet man mit $\mathtt{m} := A \cdot d \cdot \rho$, (m ist hier mit Variable1 in der Schriftart Courier definiert um Verwechslungen mit der Längeneinheit m zu vermeiden).

die spezifische Wärmekapazität der Erde ist geschätzt: $c := 2000 \cdot \frac{J}{kg \cdot K}$.

Die Oberflächentemperatur am Abend ist um den Gefrierpunkt zB: $T_E := 275 \cdot K$.

4.2 Definition der Lösungen als Funktion

Lösung für klare Nächte

$$T(t) := \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot A}{\mathtt{m} \cdot c} \cdot t + \frac{1}{T_E^{\,3}}}}$$

$t := (0 .. 45000) \cdot s$

Derstellungebereich für die Zeit (ca 12 h)

Lösung für bedeckte Nächte

Anfangsbedingung und $T_0 := 250 \cdot K$

Da Einheiten verwendet werden muss im ln durch Kelvin dividiert werden oder alternativ die beiden Logarithmen zusammenfassen.

$$C(T_0) := \frac{1}{4 \cdot T_0^{\,3}} \cdot \ln\left(\frac{-T_0 + T_E}{K}\right) - \frac{1}{4 \cdot T_0^{\,3}} \cdot \ln\left(\frac{T_0 + T_E}{K}\right) - \frac{1}{2 \cdot T_0^{\,3}} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{T_E}{T_0}\right)$$

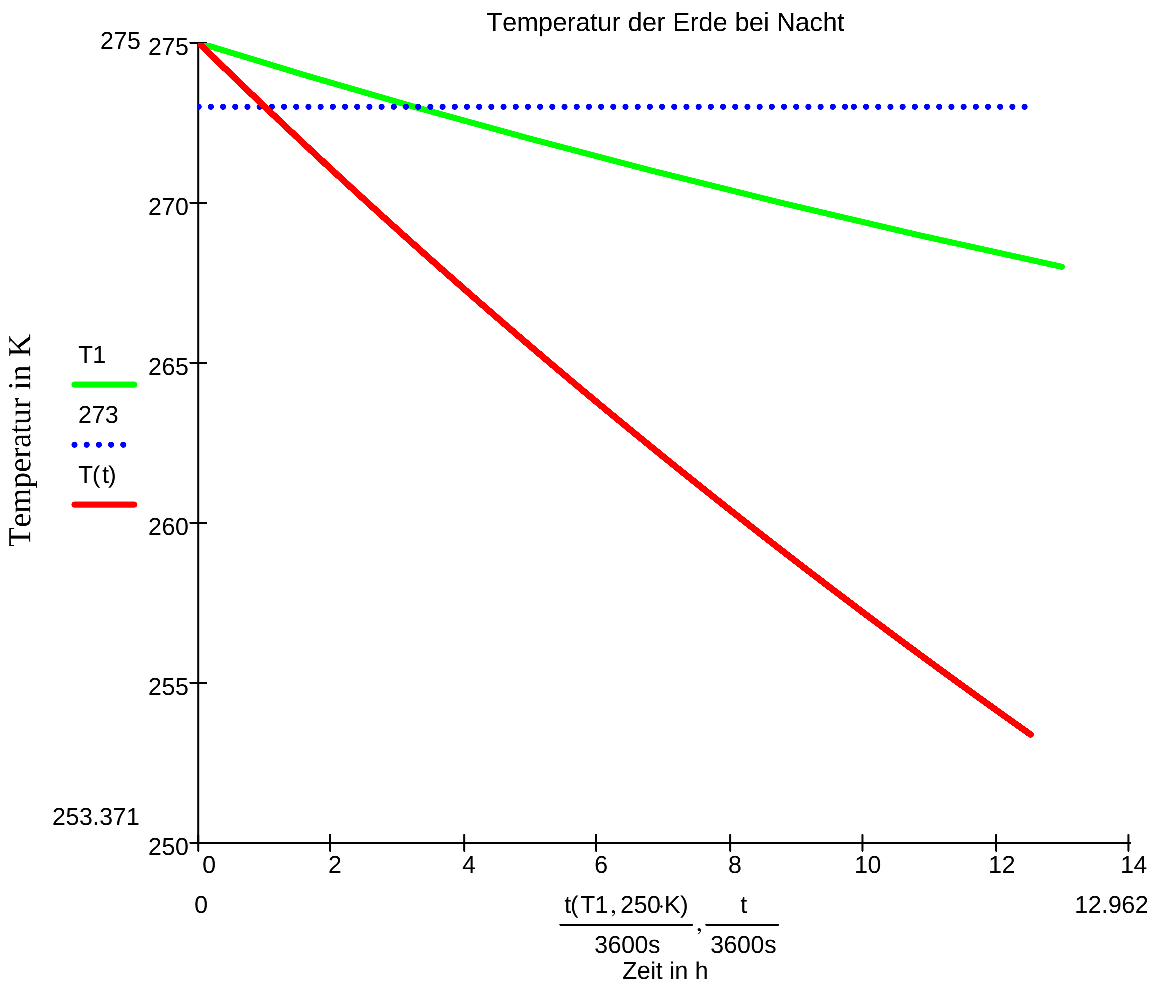
$$C(T_0) = -7.537 \times 10^{-8} \frac{1}{K^3}$$

Definition der Lösung als Funktion der Temperatur.

$$t(T, T_0) := \frac{c \cdot \mathtt{m}}{-(\varepsilon \cdot \sigma \cdot A)} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot T_0^{\,3}} \cdot \ln\left(\frac{-T_0 + T}{K}\right) - \frac{1}{4 \cdot T_0^{\,3}} \cdot \ln\left(\frac{T_0 + T}{K}\right) - \frac{1}{2 \cdot T_0^{\,3}} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{T}{T_0}\right) - C(T_0)\right)$$

Darstellungsbereich für die Temperatur: $T1 := 268 \cdot K .. 275 \cdot K$

4.3 Graphische Darstellung



- Die punktierte Linie entspricht der Temperatur 273 K = 0°C
- Die rote Kurve ist die Lösung bei klaren Nächten, deutlich ist die Abkühlung um mehr als 20 K (=20°C) zu erkennen.
- Die grüne Kurve zeigt die Temperaturabnahme bei Bedeckung, hier etwas mehr als 5 K (= 5°C).
- Obwohl manche der Konstanten nur sehr grob geschätzt wurden (d, c, ε ,...) und das in der Differentialgleichung beschriebene Modell sicherlich nur eine Näherung darstellt liefert das Ergebnis eine gute Übereinstimmung mit den beobachtbaren Temperaturdifferenzen.

$$h \cdot \frac{c}{k \cdot T \cdot \lambda}\Big)\Big)$$

$$\frac{\ln\left(-T_0 + T_E\right) - \ln\left(T_0 + T_E\right) - 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{T_E}{T_0}\right)}{T_0^{\,3}}$$